PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET U NIŠU
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

ZADACI SA REŠENJIMA
SA PRIJEMNOG ISPITA IZ MATEMATIKE, JUN 2012

---

1. Odrediti moduo kompleksnog broja

$$z = \frac{(1+i)^{200} - (1-i)^{198}}{(1+i)^{196} + (1-i)^{194}}.$$

Rešenje: Uočimo da važi

$$(1+i)^2 = 2i \Rightarrow (1+i)^{200} = 2^{100} i^{100} = 2^{100}(i^4)^{25} = 2^{100} \wedge \quad (1+i)^{196} = 2^{98}(i^4)^{24} i^2 = -2^{98};$$
$$(1-i)^2 = -2i \Rightarrow (1-i)^{198} = -2^{99} i^{99} = -2^{99}(i^4)^{24} i^3 = 2^{99} i \quad \wedge$$
$$(1-i)^{194} = -2^{97} i^{97} = -2^{97}(i^4)^{24} i = -2^{97} i.$$

Odatle sledi

$$z = \frac{2^{100} - 2^{99} i}{-2^{98} - 2^{97} i} = \frac{8-4i}{-2-i} = -\frac{12}{5} + \frac{16}{5} i.$$

Dakle,

$$|z| = 4.$$

2. Polinom $P(x)$ pri deljenju sa $x-1$ daje ostatak -1, pri deljenju sa $x-2$ daje ostatak 5, a pri deljenju sa $x-3$ daje ostatak 15. Odrediti ostatak pri deljenju polinoma $P(x)$ sa $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

Rešenje: Na osnovu Bezuovog stava, ostatak pri deljenju polinoma $P(x)$ sa $x-a$ je $P(a)$. Prema uslovima zadatka, važi

$$P(1) = -1,\ P(2) = 5,\ P(3) = 15. \tag{1}$$

Neka je

$$P(x) = Q(x)S(x) + R(x), \tag{2}$$

pri čemu je $Q(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ i $st R(x) \le 2$. Polinom $R(x)$ je oblika

$$R(x) = ax^2 + bx + c. \tag{3}$$

Kako je $Q(1) = Q(2) = Q(3) = 0$, to je, na osnovu (1), (2) i (3),

$$\begin{aligned} -1 &= P(1) = R(1) = a + b + c, \qquad (4)\\ 5 &= P(2) = R(2) = 4a + 2b + c,\\ 15 &= P(3) = R(3) = 9a + 3b + c. \end{aligned}$$

Rešavanjem sistema (4), dobija se $a = 2$, $b = 0$, $c = -3$, pa je traženi ostatak

$$R(x) = 2x^2 - 3.$$

3. Odrediti vrednosti parametra m za koje rešenja x_1 i x_2 kvadratne jednačine $x^2 + 2mx + 4 = 0$ zadovoljavaju relaciju

$$\frac{x_1^2}{x_2^2} + \frac{x_2^2}{x_1^2} \leq 2.$$

Rešenje: Na osnovu Vijetovih pravila važi

$$x_1 + x_2 = -2m, \qquad x_1 x_2 = 4.$$

Odatle sledi

$$\begin{aligned}\frac{x_1^2}{x_2^2} + \frac{x_2^2}{x_1^2} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{x_1^4 + x_2^4 - 2x_1^2x_2^2}{x_1^2x_2^2} \leq 0 &\Leftrightarrow (x_1^2 + x_2^2)^2 - 4x_1^2x_2^2 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow (x_1^2 + x_2^2)^2 \leq 64 \Leftrightarrow [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2]^2 \leq 64 \\ &\Leftrightarrow [4m^2 - 8]^2 \leq 64 \Leftrightarrow |4m^2 - 8| \leq 8 \\ &\Leftrightarrow -8 \leq 4m^2 - 8 \leq 8 \\ &\Leftrightarrow |m| \leq 2 \Leftrightarrow m \in [-2, 2].\end{aligned}$$

4. Rešiti nejednačinu

$$\frac{|2x-3| + x}{x^2 - 3x + 2} < 1.$$

Rešenje: Odredimo prvo oblast definisanosti:

$$x^2 - 3x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \land x \neq 2.$$

Pod datim uslovima važi

$$\begin{aligned}&\frac{|2x-3| - x^2 + 4x - 2}{x^2 - 3x + 2} < 0 \\ &\Leftrightarrow \left(2x - 3 \geq 0 \land \frac{2x - 3 - x^2 + 4x - 2}{x^2 - 3x + 2} < 0\right) \lor \left(2x - 3 < 0 \land \frac{-2x + 3 - x^2 + 4x - 2}{x^2 - 3x + 2} < 0\right) \\ &\Leftrightarrow \left(x \geq \frac{3}{2} \land \frac{-x^2 + 6x - 5}{x^2 - 3x + 2} < 0\right) \lor \left(x < \frac{3}{2} \land \frac{-x^2 + 2x + 1}{x^2 - 3x + 2} < 0\right) \\ &\Leftrightarrow \left(x \geq \frac{3}{2} \land \frac{-(x-1)(x-5)}{(x-1)(x-2)} < 0\right) \lor \left(x < \frac{3}{2} \land \frac{(x - (1-\sqrt{2}))(x - (1+\sqrt{2}))}{(x-1)(x-2)} < 0\right) \\ &\Leftrightarrow \left(x \geq \frac{3}{2} \land x \in (-\infty, 2) \cup (5, +\infty)\right) \lor \left(x < \frac{3}{2} \land x \in (-\infty, 1-\sqrt{2}) \cup (1, 2) \cup (1+\sqrt{2}, +\infty)\right) \\ &\Leftrightarrow x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right) \cup (5, +\infty) \lor x \in (-\infty, 1-\sqrt{2}) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right) \\ &\Leftrightarrow x \in (-\infty, 1-\sqrt{2}) \cup (1, 2) \cup (5, +\infty).\end{aligned}$$

5. Rešiti nejednačinu

$$4^{\frac{1}{x}-1} - 2^{\frac{1}{x}-2} - 3 \leq 0.$$

Rešenje: Nejednačina ima smisla za $x \neq 0$. Tada je

$$\begin{aligned}
4^{\frac{1}{x}-1} - 2^{\frac{1}{x}-2} - 3 \leq 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad 2^{\frac{2}{x}} - 2^{\frac{1}{x}} - 12 \leq 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad t^2 - t - 12 \leq 0 \land t = 2^{\frac{1}{x}} \\
&\Longleftrightarrow \quad t \in [-3, 4] \land t = 2^{\frac{1}{x}} \\
&\Longleftrightarrow \quad 2^{\frac{1}{x}} \leq 4 \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{x} \leq 2 \\
&\Longleftrightarrow \quad \left(x > 0 \land x \geq \frac{1}{2}\right) \lor x < 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad x \geq \frac{1}{2} \lor x < 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad x \in (-\infty, 0) \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right).
\end{aligned}$$

6. Rešiti nejednačinu

$$\log_x(x+1) < \log_{\frac{1}{x}}(2-x).$$

Rešenje: Logaritamske funkcije su dobro definisane ukoliko važi

$$x > 0 \land x \neq 1 \land x + 1 > 0 \land 2 - x > 0 \Leftrightarrow x \in D = \{x \in R | x \in (0,1) \cup (1,2)\}.$$

Kako je

$$\log_{\frac{1}{x}}(2-x) = -\log_x(2-x),$$

to je

$$\begin{aligned}
&\log_x(x+1) + \log_x(2-x) < 0 \land x \in D \\
\Leftrightarrow\ &\log_x[(x+1)(2-x)] < 0 \land x \in D \\
\Leftrightarrow\ &\big(x \in (0,1) \land (x+1)(2-x) > 1\big) \lor \big(x \in (1,2) \land (x+1)(2-x) < 1\big) \\
\Leftrightarrow\ &\left(x \in (0,1) \land x \in \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\right) \lor \left(x \in (1,2) \land x \in \left(-\infty, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)\right) \\
\Leftrightarrow\ &x \in (0,1) \cup \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}, 2\right).
\end{aligned}$$

7. Rešiti jednačinu

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \cos 4x.$$

Rešenje:

$$\begin{aligned}
&\sin^4 x + \cos^4 x = \cos 4x \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\quad &(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = \cos^2 2x - \sin^2 2x \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\quad &1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = 1 - 2\sin^2 2x \Leftrightarrow \frac{3}{2}\sin^2 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\quad &2x = k\pi,\ k \in Z \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2},\ k \in Z.
\end{aligned}$$

8. Pravilna četvorostrana prizma ima omotač $8m^2$ i dijagonalu $3m$. Izračunati njenu zapreminu.

Rešenje: U osnovi pravilne četvorostrane prizme je kvadrat stranice a i neka je H visina prizme. Tada je površina omotača $M = 4aH = 8m^2$, odakle sledi $aH = 2$, tj. $H = \frac{2}{a}$.

Dijagonala pravilne četvorostrane prizme je $D = 3m$. Na osnovu $D^2 = 2a^2 + H^2$, zaključujemo

$$\begin{aligned} 9 = 2a^2 + \frac{4}{a^2} &\iff 2t^2 - 9t + 4 = 0 \ \wedge \ t = a^2 \\ &\iff (t = 4 \wedge t = \frac{1}{2}) \wedge t = a^2 \\ &\iff a = 2 \ \vee a = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Prema tome, $(a = 2 \ \wedge H = 1) \ \vee \ (a = \frac{\sqrt{2}}{2} \ \wedge H = 2\sqrt{2})$, odnosno zapremina prizme je $V = a^2H = 4m^3 \vee V = \sqrt{2}m^3$.

9. Data je parabola $y^2 = 6x$, $x \geq 0$ i prava $(p) : x - 2y + 10 = 0$. Odrediti jednačinu kruga koji dodiruje pravu p, a njegov centar je dodirna tačka parabole i tangente parabole t koja je paralelna pravoj p.

Rešenje: Eksplicitni oblik jednačine prave p je

$$(p) : y = \frac{1}{2}x + 5. \tag{5}$$

Kako je $t \parallel p$, sledi da je koeficijent pravca prave t jednak $\frac{1}{2}$, pa je njena jednačina

$$(t) : y = \frac{1}{2}x + n. \tag{6}$$

Vrednost n određuje se iz uslova dodira prave t i parabole. Zamenom (6) u jednačinu parabole se dobija kvadratna jednačina

$$\frac{1}{4}x^2 + (n - 6)x + n^2 = 0.$$

Prava t dodiruje parabolu akko poslednja jednačina ima jedno rešenje. Diskriminanta te jednačine je

$$D = (n - 6)^2 - n^2.$$

Dakle, uslov dodira je $D = 0 \Leftrightarrow n = 3$, odakle se dobija

$$(t) : y = \frac{1}{2}x + 3. \tag{7}$$

Neka je O tačka dodira prave t i parabole. Njene koordinate se dobijaju zamenom jednačine prave t u jednačinu parabole:

$$\frac{1}{4}x^2 - 3x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = 6, \ y = 6 \Rightarrow O(6, 6).$$

Na osnovu uslova zadatka, $O(6, 6)$ je centar traženog kruga čija je jednačina

$$(K) : (x - 6)^2 + (y - 6)^2 = r^2. \tag{8}$$

Kako je prava p tangenta kruga K, njegov poluprečnik se određuje iz uslova dodira prave p i kruga K. Zamenom (5) u (8) se dobija

$$\frac{5}{4}x^2 - 13x + 37 - r^2 = 0.$$

Diskriminanta ove jednačine je

$$D_1 = 5r^2 - 16,$$

pa je uslov dodira $D_1 = 0 \Leftrightarrow r = \frac{4}{\sqrt{5}}$.

Dakle, tražena jednačina kruga je

$$(K) : (x-6)^2 + (y-6)^2 = \frac{16}{5}.$$

10. U aritmetičkom i geometrijskom nizu podudaraju se prvi, drugi i četvrti član, dok je treći član aritmetičkog niza za 18 veći od trećeg člana geometrijskog niza. Odrediti ove nizove.

Rešenje: Označimo $i-$ti član aritmetičkog niza sa a_i, a geometrijskog sa g_i, neka je d razlika aritmetičkog niza, a q količnik geometrijskog niza. Prema uslovu zadatka, važi sledeće:

$$a_1 = g_1, \ a_2 = g_2, \ a_3 = g_3 + 18, \ a_4 = g_4,$$

odnosno:

$$a_1 + d = a_1 q, \ \ a_1 + 2d = a_1 q^2 + 18, \ \ a_1 + 3d = a_1 q^3.$$

Izrazimo d iz prve jednačine kao $a_1(q-1) = d$, i zamenom u drugu i treću, dobijamo (posle sređivanja): $2a_1 q - a_1 = a_1 q^2 + 18, \ \ 3a_1 q - 2a_1 = a_1 q^3$, odnosno $a_1(2q - 1 - q^2) = 18, \ \ a_1(3q - 2 - q^3) = 0$. Kako a_1 ne sme da bude nula, mora biti $q^3 - 3q + 2 = 0$. Ovo je jednačina trećeg stepena, ali odmah vidimo da je jedno njeno rešenje $q = 1$. Kako je $q^3 - 3q + 2 = (q-1)(q^2 + q - 2)$, druga dva rešenje su $q = 1$ i $q = -2$. Rešenje $q = 1$ moramo odbaciti, jer ne postoji a_1 takvo da $a_1(2q - 1 - q^2) = 18$ za $q = 1$. Rešenje $q = -2$ daje $a_1 = -2$ i $d = 6$, što znači da su traženi nizovi: $(a) : -2, 4, 10, 16, \ldots$ i $(g) : -2, 4, -8, 16, \ldots$.